

Gradjevinski fakultet
Univerziteta u Beogradu

MATEMATIKA 1

1. Rešiti i diskutovati sistem u zavisnosti od realnih parametara a i b :

$$\begin{aligned} x+y-z &= 1 \\ 2x-y-2z &= 3 \\ x+4y+z &= b \\ 4x+y+az &= 5. \end{aligned} \quad (20 \text{ poena})$$

2. Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene

vektore matrice A . (25)

3. Data su prave $p: \frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$ i $q: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{4}$.

a) Odrediti m tako da se prave p i q seku;

b) Za takvo m odrediti jednačinu ravni α koja sadrži prave p i q ;

c) Odrediti jednačinu ravni β koja sadrži pravu q i normalna je na ravni α . (10+10+15)

4. Odrediti kanonsku jednačinu krive $L: 8x^2 + 4xy + 5y^2 + 8x + 14y + 5 = 0$. (20)

avgust 2007. (I grupa)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & a & 1 & b \\ 4 & 1 & a & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & b-1 \\ 0 & -3 & a+1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & b-1 \\ 0 & 0 & a+8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a+8=0, a=-8, 1 \quad | \quad A=5 \quad | \quad P_A=3 \quad | \quad q \in B$$

$$y-2z=b \quad | \quad z=b/2$$

$$b=0 \quad | \quad P_A=P_B=3$$

$$a+8 \neq 0, a \neq -8, +cu$$

$$(x, y, z, t) = (\dots, \dots, \dots, \dots)$$

МАТЕМАТИКА I

1. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

- А) Наћи карактеристичне вредности и карактеристичне векторе матрице А.
 Б) Наћи карактеристичне вредности и карактеристичне векторе матрице $\text{adj} A$.
 В) Наћи $\sin A$.

2. У зависности од вредности параметра p и q наћи фундаментални skup решења датог хомогеног система једначина

$$2x + 7y + 4z + 5t + 8u = 0$$

$$4x + 4y + pz + 5t + 4u = 0$$

$$x + qy + 5z - 5t - 14u = 0$$

$$3x + 5y + 7z + 5t + 6u = 0.$$

3. Дати су права $p: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$ и тачке $A(1, m-1, 1)$ и $B(m+1, 2m-1, 0)$.

А) Наћи вредности параметра m за које права p и права q која пролази кроз тачке A и B припадају једној равни.

Б) За $m=2$ наћи једначину равни која садржи праве p и q .

В) За $m=2$ наћи растојање тачке A од праве p .

Г) За $m=2$ наћи једначину кружног цилиндра који садржи тачку A а права p му је оса.

4. Дата је крива $C: x^2 - 4xy + y^2 + 14x - 10y + 19 = 0$. Наћи канонску једначину ове криве а затим и једначине њених асимптота у полазном координатном систему.

$$\left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)$$

MATEMATIKA 1

1. Rešiti matricnu jednačinu $AX = (X^{-1} + B^{-1})^{-1}$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}. \quad (20 \text{ poena})$$

2. Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. a) Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice A . b) Naći A^n , gde $n \in \mathbb{N}$. (15+15)

3. Odrediti jednačinu prave p koja sadrži presečnu tačku ravni $\alpha : 2x - y + 3z - 4 = 0$ i ose Oy , pripada ravni α i normalna je na pravoj $q : x - y + 4z - 9 = 0, 2x + y - 3z + 2 = 0$ (20)

4. Data je ravan $\alpha : 2x + 2y + z - 9 = 0$ i sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = 25$.
a) Odrediti centar i poluprečnik presečnog kruga k ravni α i sfere S .
b) Svesti na kanonski oblik jednačinu projekcije kruga k na ravan xOy . (15+15).

4. april 2007. (I grupa)

$$AX = (X^{-1} + B^{-1})^{-1} \quad / \cdot (X^{-1} + B^{-1})$$

$$A^{-1} / \quad AX(X^{-1} + B^{-1}) = E$$

$$X(X^{-1} + B^{-1}) = A^{-1}$$

$$E + XB^{-1} = A^{-1}$$

$$XB^{-1} = A^{-1} - E \quad / \cdot B$$

$$X = (A^{-1} - E) \cdot B$$

МАТЕМАТИКА I

1. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$.

- А) Наћи карактеристичне вредности матрице A .
Б) Наћи карактеристичне вредности матрице A^{-1} и A^4 .
В) Израчунати A^n .

2. У зависности од вредности параметара a и b решити систем једначина:

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z + 4t &= 5 \\ 4x - 2y + 5z + 6t &= 7 \\ 6x - 3y + 7z + 8t &= b \\ ax - 4y + 9z + 10t &= 11. \end{aligned}$$

3. Дате су тачке: $A(2, 1, -4)$, $B(0, -1, -6)$, $C(3, 0, -1)$ и $D(-3, -4, -3)$.

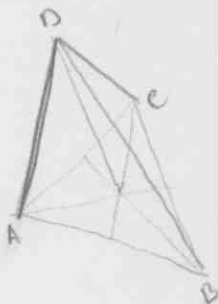
А) Наћи запремину тетраедра $ABCD$.

Б) Наћи једначину равни ABC и координате подножја H висине тетраедра из темена D .

В) Наћи угао који заклапа ивица тетраедра AD са основом ABC .

Г) Наћи координате вектора CC_1 висине троугла ABC .

4. Дата је крива $C: x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y = 4$. Наћи канонску једначину криве као и координате жиже у полазном систему.



МАТЕМАТИКА 1
Група А

1. Наћи сопствене вредности и сопствене векторе матрице $B = A^2 + A$ и израчунати B^n ($n \in \mathbb{N}$), ако је

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(16 + 9 поена)

2. У зависности од реалних параметара p и q решити систем

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 &= p - 3 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= p + 2 - 3 \\ 2x_1 - 17x_2 + 6x_3 + qx_4 + qx_5 &= 3. \end{aligned}$$

(25 поена)

3. Израчунати $((\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) \times (\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c})) \cdot (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$, ако је $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 1$.

$$((\vec{a} \times \vec{b}) + 2\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) \quad (23 \text{ поена})$$

Дате су тачке $A(1, 1, 1)$, $B(5, -7, 9)$ и $C(-5, -8, 13)$. На правој AC налазе се центри двеју сфера које додирују симетралну раван дужи AB и које имају једнаке полупречнике $R = 2$. Наћи једначине сфера.

(б) Наћи једначину цилиндричне површи Γ коју образују оне заједничке тангенте сфера из (б) које су паралелне правој AC .

(15 + 12 поена)

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -4 & p-3 \\ 5 & -4 & 1 & 1 & p+2 \\ 2 & -17 & 6 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & p+1 \\ 5 & -4 & 1 & 1 & p+2 \\ 2 & -17 & 6 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & & & & \end{array}$$